

Министерство образования, науки и молодежной политики
Республики Коми
Государственное профессиональное образовательное учреждение
«Сыктывкарский политехнический техникум»

Рассмотрено на ПЦК
Протокол № _____ 20__ г.
от « ____ » _____ 20__ г.

Согласовано:
Зам. директора по УПР
« ____ » _____ 20__ г.

Комплект контрольно-оценочных средств учебной дисциплины

ЕН.01 Математика
основной профессиональной образовательной программы
по специальности СПО
190631-Техническое обслуживание и ремонт автомобильного транспорта

Математика: комплект контрольно-оценочных средств по
специальности среднего специального образования 190631-Техническое
обслуживание и ремонт автомобильного транспорта

Разработчик: Панюкова Нина Геннадьевна, преподаватель

Решение. Действуя в соответствии с правилами получаем:

$$z = \frac{2-7i}{3+4i} = \frac{(2-7i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{6-8i-21i+28i^2}{9-16i^2} = \frac{6-29i-28}{9+16} = \frac{-22-29i}{25} = -\frac{22}{25} - \frac{29}{25}i;$$

поэтому $\operatorname{Re} z = -\frac{22}{25}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{29}{25}$.

Тригонометрическая форма комплексного числа. Каждому комплексному числу вида (1.1) можно поставить в соответствие точку $M(x, y)$ на декартовой плоскости (при этом на оси OX располагаются вещественные числа $z = x + i0 = x$, а на оси OY — чисто мнимые числа $z = 0 + iy = iy$).

Модуль комплексного числа назовем длину отрезка $|OM|$ (или расстояние от начала координат до точки M), т.е. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Аргументом комплексного числа ($\varphi = \operatorname{Arg} z$) назовем угол, который вектор \overline{OM} образует с положительным направлением оси OX . Главное значение аргумента, которое, как правило, используется при осуществлении действий с комплексными числами, удовлетворяет условию $0 \leq \varphi < 2\pi$. При этом выражение вида

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (1.2)$$

называется **тригонометрической формой записи комплексного числа**.

Преобразуем (1.1)

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = |z| \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

и, сравнивая с (1.2), получаем, что аргумент z можно найти, решив систему

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{|z|} \\ \sin \varphi = \frac{y}{|z|} \end{cases} \quad (1.3)$$

Пример 3. Записать комплексное число в тригонометрической форме $z = 1 - i\sqrt{3}$, указать модуль и аргумент комплексного числа.

Решение. По определению $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$. Для определения

аргумента воспользуемся формулой: $\begin{cases} \cos \varphi = \frac{1}{2} \\ \sin \varphi = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. Получаем, что

$\varphi = \operatorname{arg} z = \frac{5\pi}{3}$. Тригонометрическая форма заданного комплексного числа

имеет вид: $z = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$.

Возведение в степень и извлечение корней. Если комплексное число задано тригонометрической формой $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то справедлива формула Муавра

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (1.4)$$

Для извлечения корня n -й степени (n — целое число, большее 1) из комплексного числа, заданного в тригонометрической форме, применяется формула, дающая n значений этого корня:

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k=0, 1, \dots, n-1. \quad (1.5)$$

Пример 4. Вычислить: а) $(-1+i)^{13}$; б) $\sqrt[3]{-1}$.

Решение. В задании а), чтобы воспользоваться формулой Муавра, необходимо представить комплексное число в тригонометрической форме.

Имеем: $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $\cos \varphi = -1/\sqrt{2}$ и $\sin \varphi = 1/\sqrt{2}$, т.е. $\varphi = 3\pi/4$ (так как соответствующая точка лежит во второй четверти). Следовательно, $-1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ и $(-1+i)^{13} = \sqrt{2}^{13} \left(\cos \frac{3 \cdot 13\pi}{4} + i \sin \frac{3 \cdot 13\pi}{4} \right)$ (в

силу (1.4)). Учитывая что $\frac{39\pi}{4} = 10\pi - \frac{\pi}{4}$ и используя свойства тригонометрических функций, получаем:

$$(-1+i)^{13} = 64\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = 64\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 64 - 64i.$$

В задании б) тригонометрическая форма заданного числа имеет вид $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$ ($|z|=1$), поэтому в силу (1.5)

$$z_k = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3}, \quad k=0, 1, 2.$$

Выписываем три искоемых корня:

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$z_1 = \cos \frac{\pi + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{3} = \cos \pi + i \sin \pi = -1;$$

$$z_2 = \cos \frac{\pi + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Содержание практической работы

Задание 1. Вычислить, выписать вещественную и мнимую части полученных комплексных чисел.

1) $(2-3i)-(1+i)(2i-1)$ 2) $\frac{2+3i}{1-i}$ 3) $6i + \frac{1+7i}{2-3i}$

4) $(3+i)\frac{1+i}{1-i}$ 5) $\frac{(1-i\sqrt{3})^2}{i-\sqrt{3}}$ 6) $(1+2i)^3 - 3$

7) $(1-i)^2 + i^4$

Задание 2. Запишите предложенные комплексные числа в тригонометрической форме: 1) $-3i$; 2) $2+i$; 3) $3+3i$; 4) $2-5i$ 5) $7+8i$

6) $10-5i$ 7) $2-4i$.

Задание 3. Найти все корни уравнений:

1) $x^2 + 9 = 0$; 2) $x^2 - 3x + 10 = 0$; 4) $x^2 - 2x + 10 = 0$; 5) $x^2 + 2x + 10 = 0$; 6) $x^4 - 16 = 0$ 7) $x^2 + 100 = 0$

Содержание практической работы

Задание 1. Используя классическое определение вероятности события, решить следующие задачи:

1. В коробке 4 красных, 5 зеленых, 8 желтых, 7 белых и 1 черный шар. Найти вероятность вытянуть: красный шар; синий шар; белый шар; цветной шар; или зеленый или белый шар; не красный шар; шар одного из цветов светофора.

2. В семье – двое детей. Какова вероятность, что старший ребенок – девочка, если известно, что в семье есть дети обоего пола?

3. Мастер, имея 10 деталей, из которых 4 – нестандартных, проверяет детали одну за другой, пока ему не попадется стандартная. Какова вероятность, что он проверит ровно две детали?

4. В одном ящике 3 белых и 7 черных шаров, в другом ящике – 6 белых и 8 черных шаров. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.

5. Издательство отправило газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,9, во второе - 0,7, в третье - 0,85. Найти вероятность следующих событий:

а) только одно отделение получит газеты вовремя;

б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

6. В первой урне находятся 12 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 10 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными? Какова вероятность, что оба шара окажутся белыми?

7. В партии из 25 деталей находятся 8 бракованных. Вынимают из партии наудачу две детали. Определить, какова вероятность того, что обе детали окажутся бракованными.

8. Подброшены две игральные кости. Найти вероятность события А того, что выпадет хотя бы одна шестерка.

9. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, большее 4.

10. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, не меньшее 2 и не большее 5.

Задание 2. Используя формулы полной вероятности и Байеса, решить следующие задачи:

1. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбирается урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из 2 урны?

2. Детали, изготавливаемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру = 0,5, ко второму = 0,6. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером = 0,94, а вторым = 0,92. Годная деталь при

проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

3. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартная равна 0,9, а второго – 0,8. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь – стандартная.

4. Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 6 синих и 4 черных шаров, во второй – только синие и в третьей – только черные. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар синий?

5. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из I урны?

Задание 3. Используя формулу Бернулли, решить следующие задачи:

1. Вероятность того, что расход электроэнергии на продолжении одних суток не превысит установленной нормы равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

2. Найти вероятность осуществления от одного до трех разговоров по телефону при наблюдении шести независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,6.

3. Прибор состоит из пяти элементов, включенных в цепь параллельно и работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за время T равна 0,5. Для безаварийной работы прибора достаточно, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность того, что за время T прибор будет работать безотказно?

4. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету $= 0,3$. Какова вероятность того, что из семи приобретенных билетов три билета окажутся выигрышными?

5. Магазин получил 40 деталей. Вероятность наличия нестандартных деталей в партии равна 0,04. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в этой партии.

6. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,8. Найти вероятности возможного числа появления бракованных деталей среди 5 отобранных, найти наименьшее число появления бракованных деталей из 5 отобранных, указав его вероятность.

7. Сколько раз необходимо подбросить игральную кость, чтобы наименьшее выпадение тройки было равно 10?

8. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на кольцо $= 0,3$. Какова вероятность того, что при шести бросках 3 кольца окажутся на кольшке?

9. На самолете имеются 4 одинаковых двигателя. Вероятность нормальной работы каждого двигателя в полете равна p . Найти вероятность того, что в полете могут возникнуть неполадки в одном двигателе.

10. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Что вероятнее ожидать: отказ двух приборов при испытании четырех или отказ трех приборов при испытании шести, если приборы испытываются независимо друг от друга?

11. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточной нормы равна 0,8. Какова вероятность того, что в течение пяти рабочих дней из семи перерасхода электроэнергии не будет?

Задание 4. Найти числовые характеристики дискретных случайных величин:

1. Найти математическое ожидание случайной величины X , зная закон ее распределения:

x_i	3	5	2
p_i	0,1	0,6	0,3

2. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия 0,6. Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.

3. Найти дисперсию случайной величины X , которая задана следующим законом распределения:

x_i	1	2	5
p_i	0,3	0,5	0,2

4. Найти дисперсию случайной величины X , которая задана следующим законом распределения:

x_i	2	3	5
p_i	0,1	0,6	0,3

5. Производится 10 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна 0,6. Найти дисперсию случайной величины X – числа появления события в этих испытаниях.

**Рекомендуемая литература
Основные источники**

1. Григорьев С.Г., Иволгина С.В. Математика. – М.: Образовательно-издательский центр «Академия», 2011
2. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике. – М.: Издательский центр «Академия», 2011
3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М.: Высшая школа, 2009
4. Дадаян А.А. Математика: учеб. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2005

Дополнительные источники

1. Высшая математика для экономистов. Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2007
2. Математика и информатика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / Виноградов Ю.Н., Гомола А.И., Потапов В.И., Соколова Е.В. / - М.: Издательский центр «Академия», 2009
3. Математика для профессий и специальностей социально-экономического профиля: учебник для образовательных учреждений нач. и сред. образования / В.А. Гусев, С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина. – М.: Издательский центр «Академия», 2011
4. Спирина М.С. дискретная математика: учеб. – М.: Издательский центр «Академия», 2006
5. Омельченко В.П. Математика. – Ростов-на-Дону.: Феникс, 2006